On a Theorem of Brauer on Induced Characters of Finite Groups (有限群論)

奥山, 哲郎

数理解析研究所講究録
344巻 1979年 102-105

On a theorem of Brauer on induced characters of finite groups

北大 理　奥山哲郎

G; 有限群

$G \supseteq H$ に対し、$C(H)$: character ring of H.

$G \supseteq H \supseteq K$ に対し、$C(K)^H = \{\alpha^H \mid \alpha \in C(K)\} \subseteq C(H)$ と定義する。Brauerは、次の重要な定理を導いた。

定理(Brauer [1]).

$\mathcal{E}$ を G の基本部分群の全体とすると，$C(G) = \sum_{E \in \mathcal{E}} C(E)^G$。

ここで，上の定理を p-ブロック（p は素数）毎に考察してみる。

定理1.

B : p-ブロック，defect group D，$C_B(G)$: B に属する指標の整係数一次結合とすると，$C_B(G) \subseteq \sum_{E \in \mathcal{E}(D)} C(E)^G$，ここで，$\mathcal{E}(D)$ は $\mathcal{E}$ の元で，その p-Sylow 群が D のある共役に含まれるものの全体。

定理1は以下の定理3から系として得られる。

R : complete discrete valuation ring $\supset (\pi)$: max. ideal

$(\pi) \ni p$, K ; Rの商体, (char $K = 0$), Kは考える群の分解体と仮定する。

補題2、

$H = P \times A$, P : p-群, A : p'-群, V : indecomposable R-free, $R[G]$-加群, χをその指標とする。Vの vertex がDのとき, $\exists \eta$: $D \times A$のK-指標があって, $\chi = \eta^H$。

定理3、

V : R-free, $R[G]$-加群, $R[D]$-projective (Dはp-群) χをその指標とすると, $\chi \in \sum_{E \in \mathcal{E}(D)} C(E)^G$.

Bが defect group Dをもつp-ブロックとすると, Bに属する$R[G]$-加群はすべて$R[D]$-projectiveである (Th.54.1 [2]) から、定理3から定理1が導かれる。

モジュラーな場合の Brauer の定理の変形が Dress によって与えられている。以下、Fを標数pの代数閉体とする。

$G \supseteq H$に対し, $A(H)$を整数環上の$F[H]$の Green ring

$G \supseteq H \supseteq K$に対し, $A(K)^H = \{ \alpha^H \mid \alpha \in A(K) \} \subseteq A(H)$ と

定義する。

定理（Dress [3]）

$\mathcal{E}_p$；Gの部分群Eで$E/O_p(E)$がp'-基本群となるもの全体とすると，$A(G)=\sum_{E\in\mathcal{E}_p} A(E)^G$

この定理について，上と同様の考察をすすめることができる。

定理4.

B：defect group Dのp-ブロック，$A_B(G)$：Bに属する$F[G]$-加群の整係数一次結合とすると，$A_B(G)\subseteq\sum_{E\in\mathcal{E}_p(D)} A(E)^G$，ここで，$\mathcal{E}_p(D)$は$\mathcal{E}_p$の元$E$で，$O_p(E)$がある$D$の共役に含まれるものの全体。

補題5.

$H=AP$　$P\triangleleft H$　p-群．A：可解p'-群，V：indecomp. $F[H]$-mod. vertex $D\triangleleft H$とすると，$^\exists W$：$F[AD]$-mod. で $V=W^H$。

定理6.

V：$F[G]$-加群，vertex Dとすると，$V\in\sum_{E\in\mathcal{E}_p(D)} A(E)^G$。

Brauerの定理の考察のときと，同じようにして，定理6から定理4が導かれる。

参考文献

[1]. Brauer. Ann. of Math (2) 57 (1953) 357-377.

[2]. Dornhoff. "Group Representation Theory B" Marcel. Dekker

[3]. Dress. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 44 (1975). 101-109.

[4]. Feit. "Representations of Finite Groups" Yale. Univ.